4顆衛星，精確定位—

GPS的定位數學

你知道你的GPS如何「配備」一個昂貴的原子鐘嗎？你知道為什麼「接收機至少要4個衛星的虛擬距離測量和其他衛星資料，才可精確地算出接收機所在點之經度、緯度和高度」嗎？只要利用中學的代數，便可輕易回答這兩個問題。

賴昭正
美國芝加哥大學化學博士

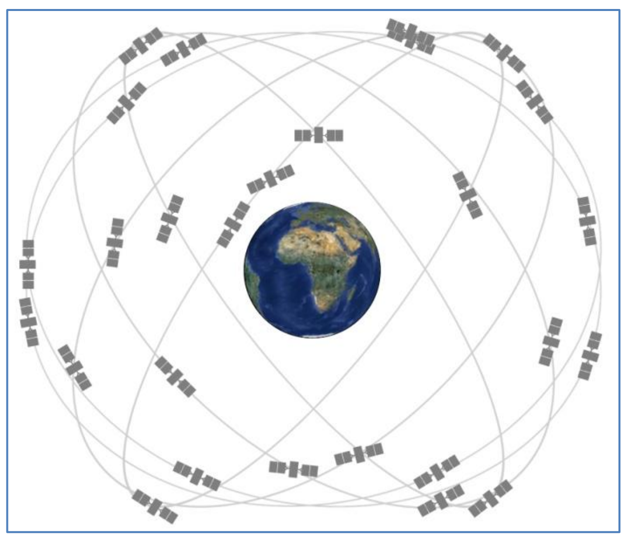
《科學月刊》在1994年2月號（第290期）刊登了邱繼志先生所寫的〈摩登羅盤全球定位衛星系統〉，該文對全球定位系統（global position system, GPS）的來龍去脈做了詳細的報導。以科技發展之日新月異，14年過去了，全球定位系統也應有很大的進展才對，但就純科學的角度來看，這似乎並未發生在全球定位系統上。因此，如果只是要介紹此系統，筆者所能添加的材料少之又少。但在讀完該篇及大部分的網路文章後，筆者還是不明白為何「在三度空間裡，接收機須利用4個或以上的衛星的虛擬距離測量，才可計算出其位址」。

因此本文決定對此一問題做進一步的探討，希望讀者也能了解中學所學的數學在日常生活中是到處可見的。在進入主題之前，我們將先簡略地「複習」一下GPS的基本結構，讓讀者不但不須翻箱倒櫃地去尋找14年前的科月，也能在筆者的介紹中，認識一些新的小發展。

GPS系統結構簡介

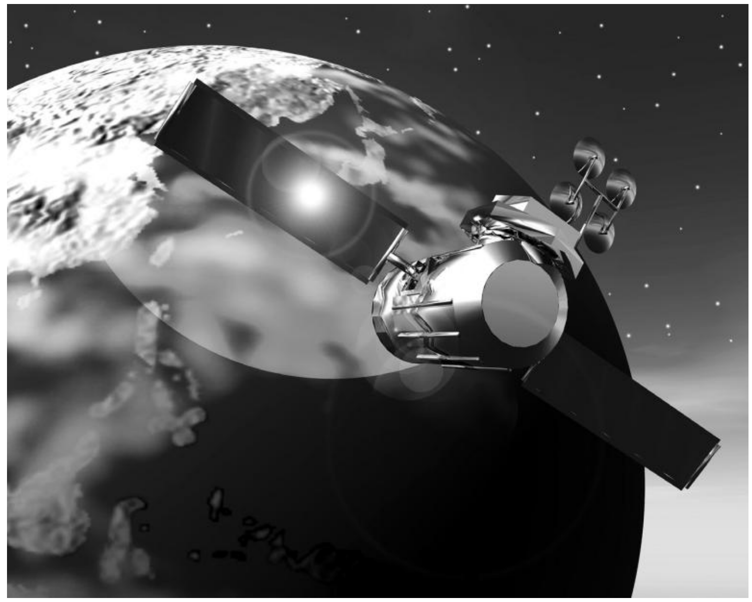
全球定位系統包括三個部分：（一）在太空中飛行的衛星；（二）地面的控制站；（三）使用者的接收機。現在我們就分別來談談這三個部分。

1993年底，有29顆定位用衛星在地球上空（約2萬公里至2萬5000公里處）的6個軌道運行（圖一）；14年後（2008年），還是只有29顆，原因不是科技未進步，而是沒有必要。為了確保地面上的任何地方，隨時都可以接收到4個衛星的訊號，事實上只要24個就夠了，那多餘的5個是備用的。



圖一：為了確保每一處都可隨時接收到衛星訊號，我們在地球上空放了29顆定位用衛星。14年前如此，14 年後亦應是如此，只是「朱顏」改。

每顆衛星的重量大約在900~1800公斤之間；如果將太陽能接收器張開，其長度為5公尺（圖二）；其飛行速率約為每小時1萬2000公里，每天可繞行地球兩周。這速率比一般車速（每小時100公里）快了百倍之多，但與用來傳遞訊息的電磁波速率（每秒31萬公里）相較，則微乎其微（我們在後面會談到其中的物理意義）！



圖二：若將衛星的太陽能接收器張開，長度可達5 公尺。

這些衛星利用L1及L2兩個載波頻率，不停地向地面發送訊息（其中1個頻道是美國軍方專用），包括與本文非常相關的資料，例如：「我是第五顆衛星，現在是台灣標準時間……，我的位置在……」。衛星的發射功率約50瓦（一般的電燈泡功率為60瓦），故其到達地球表面的訊號強度非常微弱。每個衛星的平均壽命大約為10年，因此我們現在所看到的定位衛星（這些定位衛星都是屬於美國國防部的），應該都已不是邱繼志先生在1994年所看到的了！而所有的衛星均會攜帶1個原子時鐘（atomic clock），精準度為每天誤差約10^{-9}秒。

地面的控制中心位於美國科羅拉多州（Colorado），近科羅拉多溫泉城（Colorado Springs）的西瑞佛空軍基地（Schriever Air Force Base）。除此之外，還有5個無人住持的控制台分布於世界各地。此一控制中心及5個控制台的工作，是無時無刻不停地追蹤各定位衛星，確保它們在既定的軌道上正常地運行，以及時間的正確性。

早期的地面接收機只用1個接收器來收取4個定位衛星的訊息，現在的接收機一般均配備有4個以上的接收器。因此，每個接收機均可以不斷地與某一定位衛星保持聯繫（直到接收不到其訊息）。儘管功能加強甚多，但其體積及重量，均因大型積體電路製造的技術進展而減小。例如1994年時，一般接收機的重量大約在500公克左右，現在則約為200公克；其價格也由美金千元，降至100~300美元！

GPS定位的精確度

2000年5月前，美國軍方為了防止敵人利用其所製造的GPS武器還制其身，因此故意在衛星發射的訊息中加入「亂碼」，使得接收機的定位精準度只有100公尺。如今「亂碼」已被取消，因此一般接收機的定位精準度已可達到10公尺左右〔註一〕。如果再利用地面上增設的參考追蹤站（與前面所提到的控制台不同），一些較高檔的接收機可達到3~5公尺的定位精準度。

GPS的基本定位原理，可用國中所學的基礎物理來表示：距離＝物體運動速率×飛行時間。這裡的「物體」是衛星用來傳遞給接收機訊息的電磁波，其速率為一定值（每秒31萬公里）。在這裡，我們得感謝愛因斯坦：他在1905年的特殊相對論（special theory of relativity）論文裡，首次提出了光速（電磁波的一種）不因運動狀態而異的「假設」。這個假設不但符合1987年邁克生（A. Michelson）及毛利（E. Morley）的光干涉實驗結果，後來也被完全證實。不過，這一假設事實上是違反了我們日常的生活經驗的。經驗及高中物理均告訴我們：物體的運動速率會因觀測者的相對運動狀況而異！還好這不適用於光速，否則我們在此的討論，若須考慮衛星與接收機之間的相對運動速度，就會複雜得多。

在光速為一定值c的物理中，上式就會變成：

距離＝c×電磁波傳遞時間

所以要得到誤差為10公尺的距離，我們很容易用上面的公式，算出電磁波傳遞的時間誤差應小於 4×10^{-8} 秒（現在讀者應該了解，為什麼衛星上必須配備昂貴（3~5萬美元）的原子時鐘了吧！）。事實上，不只衛星必須配備原子時鐘，地面的接收機不是也應該配備嗎？否則我們怎麼能精確量出訊號從衛星到接收器（0.1秒左右）的正確時間（誤差小於 4×10^{-8} 秒）？若真如此，那 GPS 便只有少數富人買得起，而我們大概也不會在這裡討論它了。GPS如何輕易地克服此一問題，正是本文所要探討的。不過在這之前，我們得先澄清另一特殊相對論可能「造成」的問題。

在特殊相對論裡，時間像空間一樣，並不是一個絕對、與物體運動無關的觀念（如牛頓力學）。在這一理論裡，衛星時鐘的時間將因其相對於地面的運動速率而異（相對於地面的時鐘），其變化的大小與 $(v/c)^2$ 成正比（v為衛星的地面速率)。前面已經提過，衛星的運行速率，大約在每小時1萬2000公里左右；將此值代入前述式子，我們可得相對論效應的誤差，約在 4×10^{-11} 左右：即相對於地面的原子時鐘，衛星上的原子時鐘每秒慢了 4×10^{-11} 秒![*] 這比我們定位10公尺的精確度要求（4×10^{-8} 秒）秒確然少了1000倍，但這不是可以忽略的「隨機」（random）誤差,[†] 而是固定地永遠在「慢」，因此一天下來衛星上的原子時鐘就比地面的原子時鐘慢了~3.5微秒——這就不可忽略了！因此GPS必須考慮特殊相對論的！

在廣義相對論裡，因衛星上的原子時鐘所感受到的重力遠小於在地面上的原子時鐘，因此我們也須考慮重力之影響的。事實上，在2萬公里高空中之原子時鐘每天將比地面上的原子時鐘「快」約45微秒——因此GPS更不能不考慮廣義相對論！！

為何至少要4顆衛星來定位

[*] 為使用上面近似比算出之結果；正確值為5.8×10^{-11} 秒。

[†] 2017年6月補註：筆者「一時糊塗」沒想到這是不可以忽略的非「隨機」誤差，而在原文裡錯誤地結論謂「因此可以完全忽略相對論效應，用絕對的時間與絕對的空間觀念來處理 GPS 的問題」。

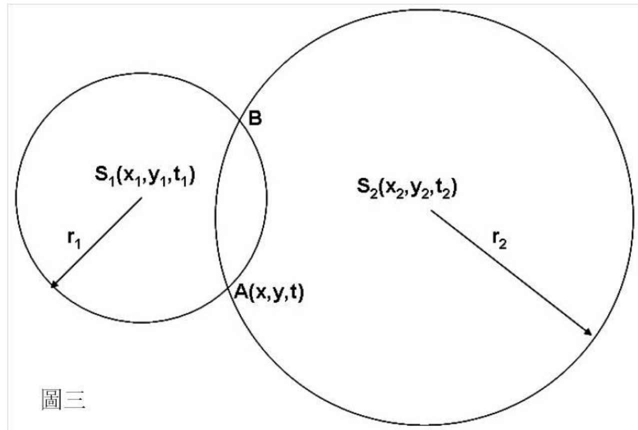
為什麼必須要有4顆衛星才能準確定位？這裡最簡單的答案是：因為我們不想在接收機上配備昂貴的原子時鐘！我們現在就來討論「如何克服此一難題」。為了討論及畫圖的方便，筆者將使用二度的平面空間來說明。只要用點想像力，讀者應可簡單地將結果推廣到現實的三度立體空間。某些讀者或許會問：用一度空間不是更簡易嗎？不幸的是，GPS所用的數學根本不能用到一度空間上。換言之，生活在一度空間的「奇怪人類」不能使用我們的GPS！他們的GPS必須真正配備原子時鐘！有興趣的讀者不妨利用這裡的推導，來證明此一結論。

先假設接收機配備有原子時鐘，這時鐘與衛星的時鐘完全一樣，也經過校正。當它的讀數為t時，它同時接收到兩個定位衛星S_1及S_2的訊息（在二維空間的世界裡），得知它們發訊的時空分別為（x_1, y_1, t_1）及（x_2, y_2, t_2），如圖三所示。因電磁波是以 c 的速率在 t_1時從 S_1傳播出來，因此接收機可以計算它在 t 時與 S_1的距離為

$$r_1 = c(t - t_1)$$

同樣地，它在t 時與 S_2 的距離理應為

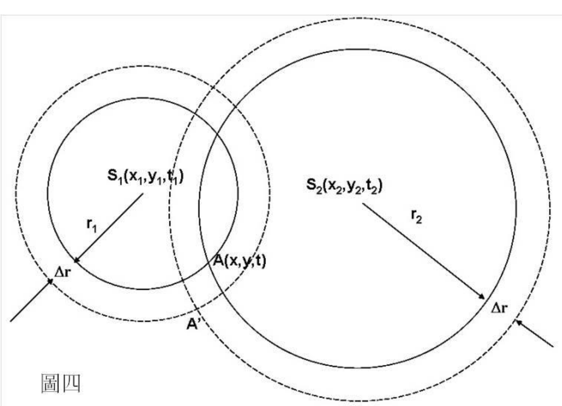
$$r_2 = c(t - t_2)$$



圖三

在二度平面空間裡，有了這兩個距離，我們便可用畫圓的方法，得到兩個交點A及B。這應是接收機的可能位置了！當然，就純幾何學來講，以S_1及S_2為中心的兩個圓並不一定會相交〔註二〕。但因我們的資料是由實體的接收機所得，所以一定會有兩個交點（其中之一為接收機的位置）。如果沒有其他資料，我們將無法確定接收機到底是在A還是B，但因為接收機一定較S_1及S_2靠近地球中心，所以我們應不需任何其他資料，就可定位接收機所在的位置為A！所以在二度空間裡，如果接收機攜帶有原子鐘，則我們只要有兩個定位衛星的資料，即可定位接收機。

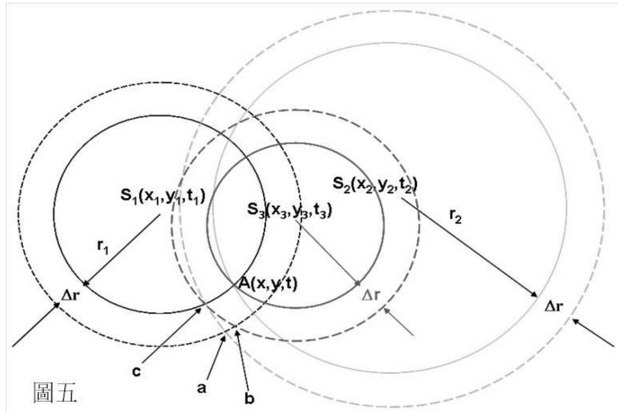
在三度空間裡，以S_1為中心所畫出的圓球表面，應與S_2為中心所畫出的圓球表面相交成一圓圈，此圓圈代表了接收機的所有可能位置。為了定位（一點），顯然兩顆衛星是不夠的！如果再加上一顆衛星〔$r_3=c(t-t_3)$〕，則第三個圓球表面應與上述的圓圈相交於兩點。同樣地，加上地球中心的資料，我們便可毫無疑問地確定接收機的位置。所以如果接收機攜帶有原子鐘，則在三度空間裡，我們只要三個衛星就可定位。



圖四

如果接收機所攜帶的不是原子鐘，而是一般時鐘怎麼辦？如果此一普通時鐘誤差為Δt，則測到的誤差在二度空間裡將為Δr（$=c\Delta t$），如圖四所示。兩個半徑分別為 $r_1+\Delta r$ 及 $r_2+\Delta r$ 的圓圈，所交之位置不再是A，而是錯誤的A’。因為訊息從衛星傳到接收器的時間，大約在0.1秒左右（如果衛星正在接收機的上方，只

需0.06秒）；所以如果Δt 太大，則兩圓甚至可能不會相交！解決此問題的方法，就是再利用一個定位衛星S_3的資料（x_3, y_3, t_3）。如果t時準確的話，以 S_1、S_2 及 S_3 為中心所畫的三個圓圈，應相交於接收機所在的A點。但是因為 t 時不準而造成Δr的半徑誤差，使得它們相交於a、b、c三點（圖五）。



圖五

怎麼使三點重合呢？最簡單與直覺的方法，就是慢慢地改變Δt（即Δr），直到三點重合為止。這在應用數學上稱為試誤法（trial and error），本來是很繁瑣的工作，但藉助微電腦的快速運算，則變成輕而易舉的事情。當三點重合於A的位置時，我們不但成功地定了位，而且得知普通時鐘的誤差Δt，即得到正確的時刻！所以，多用一個衛星來定位的另一收穫是：接收機已成了原子時鐘。事實上，它連普通時鐘都不需要攜帶；但為了不用時也能提供時刻，一般市面上的接收機還是裝有石英時鐘，並不停地校正。

在三度空間裡，如果接收機使用了原子鐘，則四個圓球表面是應相交於一點的〔註三〕！但如果時間有誤差（或未配備原子鐘），這四個球表面將相交於四點（每三個表面相交於一點）。調整時間的誤差值使四點重合，則我們不但成功地定了位，且能得到如同原子鐘般精確的時刻。

GPS的數學

最後，讓我們在這裡以嚴格的數學眼光來探討GPS的原理。這裡所用的數學屬於國中的代數，對數學有興趣的一般讀者應可了解。在幾何代數上，所謂的圖形相交點，即是解聯立方程式所得的根，GPS 上的方程式可用測得的資料來表達。在二度空間裡，由測得的第一個衛星（S_1）的資料，我們可得：

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = c^2(t - t_1)^2$$

（圓形方程式）其物理意義為：接收機的位置（x, y），是在以 S_1 中心（x_1, y_1），半徑為 c（t − t_1）的圓周上。同樣地，我們由第二個衛星（S_2）可得方程式：

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = c^2(t - t_2)^2$$

如果 t、t_1 及 t_2 均是原子鐘的正確時刻，則上面兩個方程式僅含兩個未知數 x 及 y。基本的代數學告訴我們：兩個聯立方程式正好可解得兩個未知數。事實上，上面的 t 即使是錯誤的，我們還是可以解得 x 及 y 值（即圖四A'點的位置）。但如果我們再加入第三個衛星（S_3）的資料：

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = c^2(t - t_3)^2$$

則在 t 為已知、但錯誤（普通時鐘）的情況下，要想利用三個聯立方程式來解兩個未知數（x及y），一般來說是無解的（即圖五的a、b、c三點）！要使三個聯立方程式有解，通常需要三個未知數。因此我們可將t視為未知數來解〔註四〕，如此不但定了位（x及y），而且也得到正確的時刻（t）。有興趣的讀者可以試試將上述方程式擴展到三度空間

上，筆者就不在此贅述了。而如果將上述方法用於一度空間，則不管用多少衛星，所得的聯立方程式均是相依、不獨立的〔註五〕，因此一度空間不能使用三度空間的 GPS 策略來定位。

結語

大部分學生在學習數學時，總覺得它抽象、無實用價值。事實上，數學在我們日常生活中處處可見！筆者在《科學月刊》所發表過的大小文章，也許不算多，但大概也不能算少；在那「眾多」的文章裡，就首推第八卷（1977年）第四期之〈分期付款與標會的利息〉，最受讀者「歡迎」了（因此筆者又在1984年第八卷第四期做了補充），該文裡所用的數學就是我們高中就學了的幾何級數（geometric series）。同樣地，本文所用的數學，也是大家耳熟能詳的聯立方程式的應用而已。當然，會造成學生對數學如此懼怕及興致盎然的一個原因，應是數學教室裡鮮少有實用的例子所致吧！

參考資料

1. 賴昭正，〈經驗的困境〉，《科學月刊》，1968年7月，71~72頁。
2. 賴昭正，〈無線電頻道〉，《科學月刊》，1981年10月，74~76頁。

****

註一：這10公尺左右的誤差，有一半以上是源自於電磁波通過大氣中的離子層所致，因為波速的改變造成5~7公尺的誤差。其他因素來自衛星上的時鐘誤差、軌道誤差、接收器雜訊及電磁波反射等。

註二：在二度空間上的兩個圓圈，在理論上是可以完全不相交，或相交於一點、兩點或無窮點（兩個圓重合）。因為我們的圓圈是透過接收機與衛星資料而畫，故不相交或有無限交點（除非兩個衛星重疊）的情形是不可能發生的。

註三：三度空間中，兩個圓球表面可能不相交，或是相交於一點、一圓圈、甚或整個圓球。再加上一個圓球表面呢？我們可以從前面兩球的結果來開始考慮。例如：在前兩球完全不相交的情況下，再加一球，我們可得完全不相交、交一點、交兩點、交一點及一圈、交兩圈……，太複雜了，再想下去也沒什麼太大的意義，因為我們的圓球是透過接收機與衛星資料而畫的，因此如果時間是精確的話，不管多少圓球，其表面均應相交於一點，即為接收機的位置！

註四：這組聯立方程式含未知數的平方，在數學上屬於非線性方程式。一般而言，求解非線性方程式比解線性方程式（只含未知數的一次方）困難得多，大部分都需藉助電腦。但如與預測值的誤差很少，則可線性化，就容易解得多。因為接收機一直在定位（除了剛開機外），故在定位前均有相當「精準」的預估值。

註五：此處所得的聯立方程式為線性方程式（只含一次方的x及t），但不獨立，因此有無窮組的解。例如：

$$x+y=3$$
$$2x+2y=6$$

為一組線性聯立方程式，看起來像是兩個方程式，但實際上它們是同一個方程式（將第二個方程式等號的兩邊除以2，則得第一個方程式）。一個方程式內有兩個未知數，其解是無窮組的，即給任何一個x值，我們便可從方程式算出其相對的 y 值。