群論、對稱、與基本粒子

賴昭正
前清大化學系教授、系主任、所長；合創科學月刊

> 數學語言對製定物理定律的恰當性的奇蹟是一個我們既不理解也不應得的好禮物。 我們應該感激它，並希望它能在未來的研究中同樣有用，並且無論是好還是壞，都會令我們在更廣大的新知領域上感到興奮——儘管或許也將使我們困惑。
>
> -1960 年 Eugene Wigner

群論（group theory）是數學的一個重要分支，雖然早在~200 年前，就已經被一位默默無名的年輕數學天才發現，但它在物理及化學上的應用，卻遲至 20 世紀初，物理學家開始了解物理定律之對稱性後才慢慢受到重視。1920 年代，德國的魏爾（Hermann Weyl）與匈牙利美籍的偉格諾爾（Eugene Wigner）兩人為最早將「群論」介紹到量子力學的物理學家。後者在 1963 年因「在原子核及基本粒子理論上的貢獻——尤其是透過發現及應用對稱的基本原理」，而獲得諾貝爾物理獎。1981 年，日本京都大學的福井謙（Kenichi Fukui）教授及美國康奈爾大學的何福曼（Roald Hoffmann）教授則因發展使用分子軌域（molecular orbital）的對稱性質來闡釋一些以前很難理解的化學反應，而穫得諾貝爾化學獎。今日，群論已是探討基本粒子物理上不可缺少的工具！

筆者在「對稱與物理」一文裡（科學月刊 2010 年 3 月）談到了許多物理定律的對稱性；但因那裡所談到的對稱都是屬於不抽象、容易想像的對稱，所以用不到群論。在「規範對稱與基本粒子」一文裡（科學月刊 2014 年 11 月），筆者介紹了抽象的規範對稱後，被「迫」不得不提 U(1)、SU(2)、SU(3)、及 SU(2)×U(1) 等群論符號，但是未加說明其數學意義。本文之寫作動機就是希望能彌補上面的缺陷，也為筆者之下一篇文章「基本粒子的標準模型」舖路。

難產的群論簡史

1829 年春天，年僅 17 歲的伽羅瓦（Évariste Galois）為了回答一般多項式方程式有無「根解」（註一）的問題，寄了一篇論文給法國科學院的名數學及物理學家柯奇（Augustin-Louis Cauchy）；在那論文裡，他提出了多項式方程式「解」的排列組合「群」之特殊關係正是方程式有無「根解」的秘密所在，再次的證明了一般的 5 次方程式無根解。柯奇是有名的只宣讀自己論文的院士，因此答應在科學院裡宣讀一位 17 歲小孩的論文顯然是看出了該論文的份量：但卻因病突然延期，該論文就從此不見了。一年後，伽羅瓦又因申請法國科學院大獎提出（有謂是因柯奇鼓舞他提出的），但負責審查的數學家卻在數個禮拜後去逝了，大概也將那篇論文帶進棺材，因此沒有人知道的它的下落，伽羅瓦也當然沒有得獎。

1830 年 7 月法國第 2 次革命成功，柯奇因不滿要宣誓效忠新政府而於 8 月底開始其瑞典和意大利的 7 年逃亡生活。1831 年元月，另一負責審查大獎的名數學及物理學家泊松（Siméon Denis Poisson）再次邀請伽羅瓦提出其論文。但數個月過去了還是石沉大海，伽羅瓦終於忍不住了，寫一封不客氣的信給院長，要求泊松不管怎麼樣都必須給一個答覆。他的革命同志學長恰瓦禮（Auguste Cheliver ）更於 5 月登報攻擊法國科學院對這位數學天才不公平的待遇，認為這是造成伽羅瓦對政府的暴力革命傾向（伽羅瓦認為七月革命只是換湯不換藥，並沒有建立真正的共和）。

泊松發現他的名字上報後，終於不得不儘速完成審查，7 月 4 日提出報告謂：

> 這篇論文既不夠清楚，也沒有足夠的發展出來，因此我們無法判斷其嚴謹性。 我們也無法對這項工作提供清晰的概念。... 理論的不同部分常能相互澄清，比單獨理解它們更容易。我們應該等待作者發表他的完整作品後，才能有明確的意見。

十天後，伽羅瓦因為穿被禁止之革命武裝服及帶武器而被補入獄。伽羅瓦雖然對法國科學院及權勢集團還是無法釋懷，但監獄中的無聊，終於促使他靜下心來，思考如何更清晰的表達他的概念。1932 年四月出獄後，好像愛上了獄中醫生的女兒；但 5 月 30 號晨即被發現因與人決鬥而陳屍於監獄附近（決鬥原因有各種說法，死時尚未滿 21 歲）。在決鬥前天，寫了一封長信給他的好友恰瓦禮，概述其發現、「群」與多項式方程式的關連、多項式方程式有「根解」之必要及充分條件等，最後結語謂：

> 在我的生活中，我經常敢於表達我不確定的主張。 但是，我在這裡寫下的所有內容，在我頭腦中已經清楚了一年多；如果讓人懷疑我發表沒有具完全證明的定理，對我來說是沒有什麼好處的。請公開要求 Jacobi 或 Gauss 提出他們對這些定理之的重要性—不是是否正確—的意見。 在那之後，我希望有人會發現收拾整理這個爛攤子是值得的。

恰瓦禮依其「遺囑」將論文寄給了當時的兩大德國數學家傑柯比（Carl Jacobi）及高斯（Carl Gauss）；但或許是天妒英才，在「紅顏薄命」後，上蒼還是照樣給他一個石沉大海的命運！還好他交對了朋友，恰瓦禮並沒有因此放棄，經過十多年的努力，終於又在伽羅瓦因自大而一直進不去的巴黎名校綜合理工學院（École Polytechnique）裡，找到了識馬的伯樂：劉維爾（Joseph Liouville）教授。經過一陣苦 K，並填補了一些粗心的漏洞後，劉維爾終於看到了伽羅瓦理論的美麗，於 1843 年 9 月在院會上宣讀；三年後又將伽羅瓦的觀念發表於他所創辦的數學雜誌上——伽羅瓦的群論終於見到了天日！

劉維爾雖然為伽羅瓦理論接生，但真正把它帶大的卻是另外一位法國數學家久爾頓（Camile Jordan）：他在排列組合群及方程式理論上的研究使得數學家真正充分地了解了伽羅瓦理論的重要性。1870 年，挪威學生薐合斯·李（Sophus Lie）留學到巴黎，在久爾頓處接觸到了伽羅瓦之混合幾何與對稱的研究後，立即陷入愛河；隔年（30 歲）提出

「幾何轉換類的研究」而取得挪威（現稱為）奧斯陸大學（Oslo University）的數學博士學位。蓚合斯·李不但沒有伽羅瓦的天分，事實上數學對他來說並不是一個容易的題目，但他在連續轉換群上的研究，卻讓他留下了不朽之名。他曾於 1890 年非常自信地說：

> 我一生的論著將經得起時間的考驗，我不懷疑隨著年月會越來越受重視。

誰能想到這 100 多年前純數學研究的預言，竟然成真，為今日解釋宇宙萬物存在與作用的基礎？！

群論

如果由一組成員 A_1、A_2、A_3、...... A_{n-1}、A_n 組成的集合（set），加上待定義之相互「作用」（一般以「⊕」符號代表），符合了下面的四個條件（$0\leq o, i, j, k \leq n$）：

1. $A_i \oplus A_j = A_k$
2. 有一成員 A_o：$A_o \oplus A_j = A_i \oplus A_o = A_i$
3. 每一成員 A_i 均可找到另一成員 A_j：$A_i \oplus A_j = A_j \oplus A_i = A_o$
4. $A_i \oplus (A_j \oplus A_k) = (A_i \oplus A_j) \oplus A_k$

則我們謂這些成員構成了一個稱為 G{成員 A_i}的「群」。如果 $A_i \oplus A_j = A_j \oplus A_i$，則 G 為「阿別林群」（abelian group）, 否則為「非阿別林群」（non-abelian group）。

這看起來很抽象，但只要用一個實際的例子，便可以了解實在是再簡單不夠了。如果將⊕定義成普通的「加」，則整數集合 { ... -3、-2、-1、0、1、2、3、 ...} 便構成一個數學上的群：

1. 4 + 6 = 10
2. 0 就是 A_o：3 + 0 = 0 + 3 = 3
3. -4 + 4 = 0; 4 + -4 = 0
4. 3 + (5 + -3) = (3 + 5) + -3

因 4 + 6 = 6 + 4，所以此群是一「阿別林群」。

現在讓我們來看一看少些複雜及抽象的三個物體（abc）之排列組合（permutation）群。這裡的成員不是簡單的數字，而是一種「操作」：例如（132）代表將第 1 個位置的 a 移到第 3 個位置，將第 3 個位置的 c 移到第 2 個位置，將第 2 個位置的 b 移到第 1 個位置，我們可得一個新的排列組合（bca）。（abc）共有下面六個排列組合情形：

（abc）（acb）（cba）（bac）（cab）（bca）

其對應之「操作」為

(1)　（23）（13）（12）（123）（132）

如果我們將⊕定義成「接著做」，倒如 (23)⊕(13) 表示將（abc）變成（cba）後，再將（cba）變成（cab），我們將「不難」證明上面六個操作構成一個稱為 S_3 的排列組合群，倒如：

1. (23)⊕(13) = （123）
2. (1)就是 A_o：(23)⊕(1) =（23）
3. (132)⊕(123) = (1)
4. (23)⊕[(123)⊕(12)] = [(23)⊕(123)]⊕(12)

因(23)⊕(13)≠(13)⊕(23)，所以此群是一「非阿別林群」。

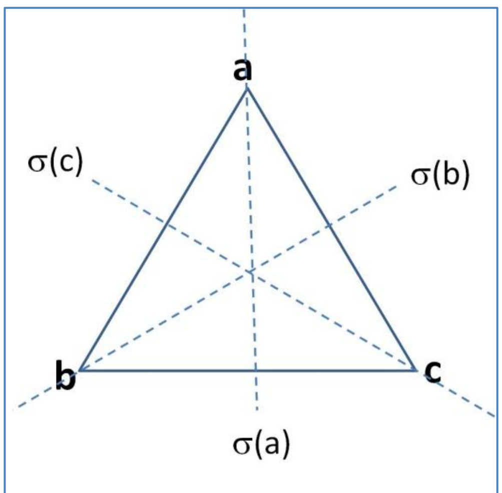
如果我們從（abc）中取出（ab）二物體，則我們將很容易看出 {(1)、(12) }集合也構成一個稱為 S_2 的排列組合群——因它只是由 S_3 之部分成員構成的，我們稱它為 S_3 之「子群」（subgroup）。反之，我們也可以用兩個不同的小群 A {成員 a_i } 及 B {成員 b_j } 透過「直接相乘」（direct product）構成一個更大的群 G {成員 $a_i\, b_j$ } = A × B。例如 $S_2 \times S_3$ 是由 S_2 及 S_3 組成的：S_2所排列組合的物體是（ab），S_3 所排列組合的物體是（xyz）；讀者應該不難證明，由

{(1)(1)、... (1)(123)、...(12)(12)、... (12)(132)}

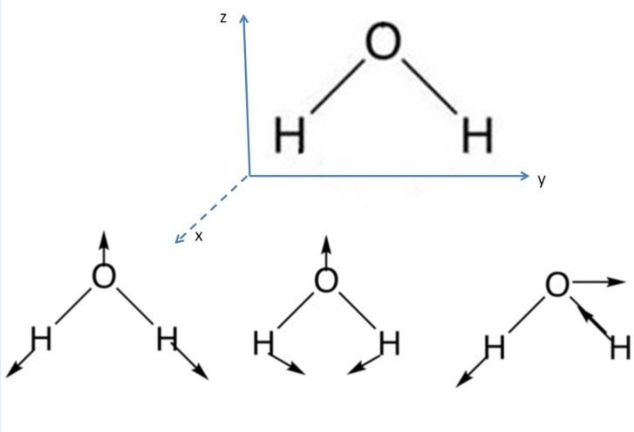
12 成員組成的集合符合上述之「群」的四個條件。S_5可任意排列組合 5 個物體（abcde），因此 $S_2 \times S_3$ 很明顯地為其「子群」。

對稱群

我們現在就來看一不抽象的例子吧。每個人都知道在二度空間（xy 平面）上之正三角形具有「對稱」之美，可是誰能說出什麼叫「對稱」呢？數學家就不一樣了：他們將告訴你，如果沿著垂直於平面之 z-軸旋轉 120 度［R(120)］，你將得到一個無法與原來圖形分辯之「新」圖形，這就是「對稱」！事實上他們更將告訴你，正三角形不但具有旋轉 120 度的「對稱」，它還具有旋轉 240 度［R(240) ］的「對稱」，以及如圖一之三個平面線［σ(a)、σ(b)、σ(c) ］的鏡像反射「對稱」！如果我們將上面五個操作［R(120)、R(240)、σ(a)、σ(b)、σ(c) ］加上零操作的 R(0)收集成一組 6 成員的集合，我們不但將能證明它們構成一個「對稱」群，還可以與上面的排列組合群找到一對一的對應關係［稱為「同型性」（isomorphism）］：例如 σ(a) ~（23）等。



圖一



圖二

化學上的分子是由（圓球）原子排列組合組成的，因此也具有對稱；例如圖二的水分子共有四個對稱操作：通過氧原子之 180 度的 z-軸旋轉［R(180)］、通過氧原子之 xz［σ(xz)］平面鏡像反射、通過氫及氧原子之 yz 平面鏡像反射［σ(yz)］、及零操作。讀者應該不難證明這四個操作構成一個數學上的群——化學家稱它為 C_{2v}。相信讀者也應該不難理解水分子的運動方程式（不管是古典或者是近代）也應該具有這樣的 C_{2v} 對稱；妙的是，透過數學的群論，物理和化學家可以完全不知道運動方程式，就可以推出水分子應該有圖二的三種振動形態！更妙的是，他們還可以知道哪些可以在紅外線光譜儀及（或）拉曼光譜儀（Raman spectrometer）上偵測到！

在圖二中之三種振動形態，左邊兩種還保有 C_{2v} 的對稱，但最右邊的就沒有了——這正是物理學家所謂的「自發對稱性破壞」（spontaneous symmetry breaking）：從這一個振動形態裡，我們看不出原來方程式所具有的對稱。此一特別振動形態破壞（隱藏）了原來之對稱。

李氏群 SU(2)

到現在為止，我們均假設群的成員是隔離、可以數的：例如平面上的正三角形具沿著垂直於平面之 z-軸旋轉 0°、120°、及 240°之三個成員［R(0)、R(120)、及 R(240)］；但平面圓所具有的對稱則是連續不可數的：如果我們沿著垂直於平面之 z-軸旋轉任何角度θ 的操作定為 R(θ)，我們將不難證明 R(θ)構成一「連續群」（continuous group）：

$$\{ R(\theta) \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

例如群論中的第 1 個條件 $A_i \oplus A_j = A_k$，只要讓 $\theta_k = \theta_i + \theta_j$ 即可。一般的連續群不會是只有一個參數（獨立變數）θ 的，但因必須符合 $A_i \oplus A_j = A_k$ 的關係，故 A_k 的所有獨立變數應為 A_i 及 A_j 所有獨立變數的函數（如 $\theta_k = \theta_i + \theta_j$）；如果此一函數為一可連續微分的解析函數（analytical function），則我們稱此連續群為「李氏群」（Lie group）。以下我們就來討論與基本粒子研究有關係之三個李氏群。

以二維空間為例，一般的線性轉換（x_1, x_2）→（x_1', x_2'）

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

可以很方便地用矩陣來表示（註二）：

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

式中的所有變數（x及a）可以是實數；但因為量子力學上常使用複數，我們將假設上面所有的變數都是複數。將上面所有可能的行列式不等於零的 2x2 矩陣收集起來，並定義 ⊕ 為一般的矩陣相乘，則

$$\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right\}$$

構成一個具八個獨立變數的李氏群（因 a_{ij} 為複數，各有兩個獨立變數）。如果我們要求

$$|x_1'|^2 + |x_2'|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2$$

則因為加了四個條件，故只剩下四個獨立變數，構成稱為 U(2) 的「么正群」（unitary group）。U(2)含有一子群；如果我們進一步「特殊」要求所有成員的行列式必須等於 1，則得僅具三個獨立變數、不含任何子群之「特殊么正群」（special unitary group）SU(2) 。SU(2) 成員因上面兩個條件之要求可以下面之通式表示

$$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1\right\}$$

a^*為 a 之共軛複數。SU(2) 為一「非阿別林群」，其成員是連續、無限多的；但李氏群理論可證明因為只有三個獨立變數，所以只要下面三個稱為「產生機」（generator）的矩陣

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

就可透過 $e^{-i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \theta_3 X_3)}$ 產生所有的成員［式中之 θ_1、θ_2、θ_3 為獨立變數；X_1、X_2、X_3 本身並不是成員］（註三）。

李氏群與基本粒子

在量子力學裡，因為運動方程式具有某種對稱，故常有具相同能量的解。假設 ψ_1 和 ψ_2 為具相同能量的二個解，則其任何組合

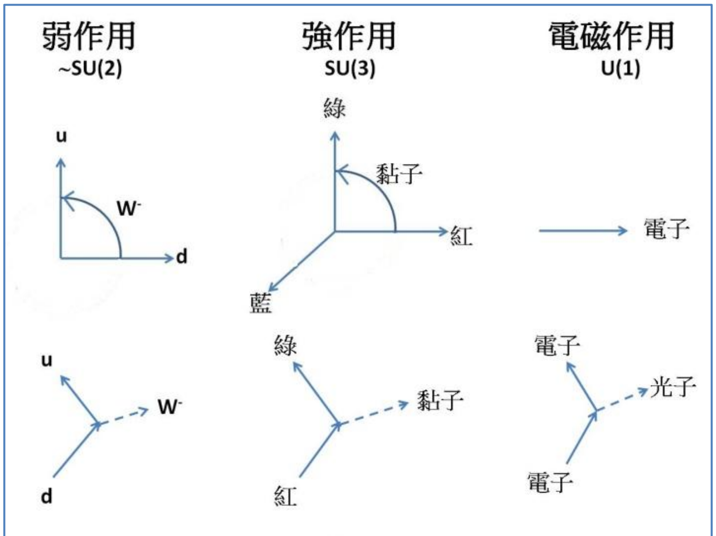
$$\psi = x_1\psi_1 + x_2\psi_2$$

亦將是其解；x_1與 x_2 為複數。因$|x_1|^2$及$|x_2|^2$分別為發現 ψ_1及 ψ_2的或然率，故$|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$。我們可透過 SU(2) 將（x_1, x_2）→（x_1', x_2'）得到一個新波動函數ψ'：它不但還是原來方程式之具同樣能量的解，$|x_1'|^2 + |x_2'|^2$還是保持等於 1。

基本粒子的標準模型謂：弱作用具有 SU(2)的對稱，但不是幾何上的對稱，而是如上面之（ψ_1、ψ_2）轉換或任何混合的內在連續對稱：例如參予弱作用之（電子、電子微中子）對或（u 夸克、d 夸克）對等。這些轉換或混合當然是靠 SU(2)成員來達成的，而

這些成員均可由三個「產生機」產生，因此我們說弱作用是靠稱為 W^+、W^-、及 Z^0 三個玻色子來達成的，如圖三之弱作用：d 夸克=ψ_1，u 夸克= ψ_2，（1,0）$W^- \rightarrow$（0, 1）。

將 SU(2) 擴展到三維空間裡（x_1, x_2, x_3）$\rightarrow$（x_1', x_2', x_3'），我們就得到具有 8 個獨立變數之 SU(3)「特殊么正群」。基本粒子的標準模型謂：強作用在（紅、藍、綠）三個內在空間裡（如圖三），具有任何轉換或混合的連續對稱群 SU(3)：其 8 個「產生機」就是強作用的 8 個作用媒介「黏子」（gluon）。



圖三

一維空間裡的 SU(1)「特殊么正群」之 1x1 矩陣為 $\left[e^{i\theta}\right]$，因其行列式一定等於 1，不須要做特殊要求，故簡稱為 U(1)。U(1) 群只有一個獨立變數，那就是電磁作用裡的「光子」。因 $e^{i\theta}\psi$ 只改變波函數的相（phase），故 U(1) 不像 SU(2) 或 SU(3)，它只改變（帶電）作用粒子的動量及能量而已。SU(2) 及 SU(3) 為「非阿別林群」，但 U(1) 則為一「阿別林群」。

在「微中子的故事」（科學月刊 2016 年 11 月）一文內，筆者提到了在基本粒子的標準模型裡，微中子是不應該有質量的。我們也知道電子具有質量，因此電子與電子微中子不可能具有 SU(2) 之互換對稱的！事實上，物理學家被這一問題困擾了好久，最後只好提出一理論謂：宇宙中充滿了真空平均值（vacuum expectation value）不為零的「希格斯場」（Higgs field），原本沒有質量的大部分基本粒子（例如電子）因為與它作用而取得了質量，破壞了原本具完美之 SU(2)×U(1) 對稱的「電弱作用」（electroweak interaction）——所以上面所談到之弱作用的 SU(2) 對稱事實上只是一種「近似」對稱而已（詳見「基本粒子的標準模型」）。

********** 註解 **********

（註一）例如二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$，其根解為 $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$。

（註二）「群」可以是一個非常抽象的數學觀念；但在 1870 年時，久爾頓即已提出可有許多不同的（不抽象）「表示」法（現稱為 representation theory）。

（註二）要由 $e^{-i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \theta_3 X_3)}$ 導出 SU(2) 成員之一般式是有點繁，但不困難，只需耐心及細心；答案為

$$\begin{bmatrix} (\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\sin\theta_2)e^{-i\theta_3} & (\cos\theta_1\sin\theta_2 - i\sin\theta_1\cos\theta_2)e^{i\theta_3} \\ -(\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2)e^{-i\theta_3} & (\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_1\sin\theta_2)e^{i\theta_3} \end{bmatrix}$$

********** 延伸閱讀 **********

(1)「對稱與物理」，科學月刊2010年3月；「我愛科學」（本書是收集筆者自 1970 年元月至2017年8月在科學月刊及少數其它雜誌所發表之文章編輯而成；由華騰文化有限公司2017年12月出版）第178頁。

(2)「規範對稱與基本粒子」，科學月刊2014年11月；「我愛科學」，第186頁。

(3)「基本粒子的標準模型」，泛科學（? 科學月刊），2018年七月（？）。